2.1 Triangulation

In diesem Abschnitt geht es um Methoden der Bestimmung astronomischer Größen, für die keine Kenntnisse über physikalische Gesetzmäßigkeiten nötig sind.

2.1.1 Bestimmung des Erdradius

Annahme: Voraussetzend nehmen wir an, dass die Entfernung Erde-Sonne groß ist. In der Abbildung unten symbolisieren die eingezeichneten Strahlen die Ausbreitungsrichtung des Lichtes, welches von der Sonne ausgeht und auf die Erde trifft. Bei ausreichend großer Entfernung Erde-Sonne können wir die Lichtstrahlen näherungsweise als parallel ansehen.
Des Weiteren nehmen wir an, die Erde sei annähernd kugelförmig. Zu dieser "Vermutung" kann man z.B. durch die Beobachtung einer Mondfinsternis kommen: Die Erde wirft deutlich sichtbar einen runden Schatten auf den Mond.

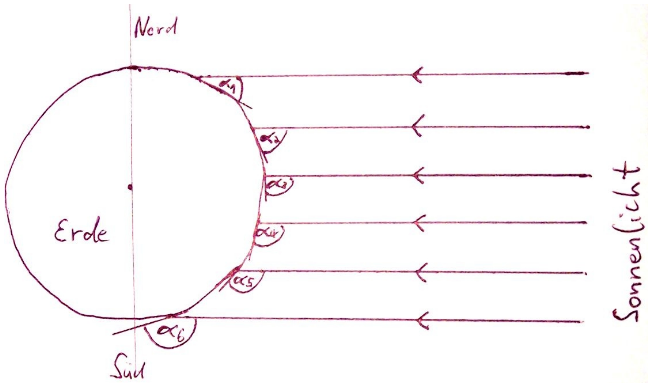
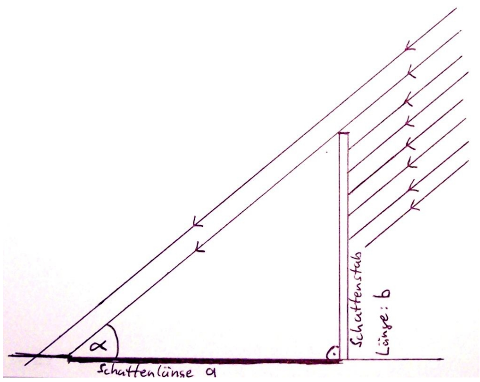


Abb. 2.1.1.1

Aufgrund der Form der Erde hängt es vom Breitengrad des Beobachters auf der Erde ab, in welchem Winkel das Licht der Sonne auf die Erde trifft.

Der Beobachter kann den Winkel an seinem Ort leicht messen:



Durch einen Schattenstab, den er senkrecht auf eine horizontale Ebene stellt. Ist b die Länge des Stabes und a die Länge des Schattens, so errechnet sich der Winkel α zwischen Strahl und Ebene aus der Definition des Tangens:

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad ,$$

wobei arctan die Umkehrfunktion der Tangensfunktion ist.

Bestimmung des Erdradius:
Zur Bestimmung des Erdradius braucht man zwei Beobachter, die an zwei (möglichst weit voneinander entfernten) Punkten auf der Erdoberfläche den Einfallswinkel des Lichtes der Sonne, auf die eben geschilderte Weise, messen.

Gemessen werden folgende Werte (vgl. Abb. 2.1.1.3):

1. Der Einfallswinkel des Lichtes α_1 am Ort des ersten Beobachters
2. Der Einfallswinkel des Lichtes α_2 am Ort des zweiten Beobachters
3. Der kürzeste Weg entlang der Erdoberfläche s.

Aus diesen Messungen berechnen wir nun den Radius der Erde.

Die folgende Abbildung ist der Einfachheit halber zweidimensional gezeichnet. In ihr soll die Zeichenebene so gewählt sein, dass beide Beobachter und der Erdmittelpunkt M in der Ebene dargestellt werden. Wir sehen in der Zeichnung daher eine Kreisscheibe, die einen Schnitt durch die Erde darstellt, mit dem Kreisbogen s.

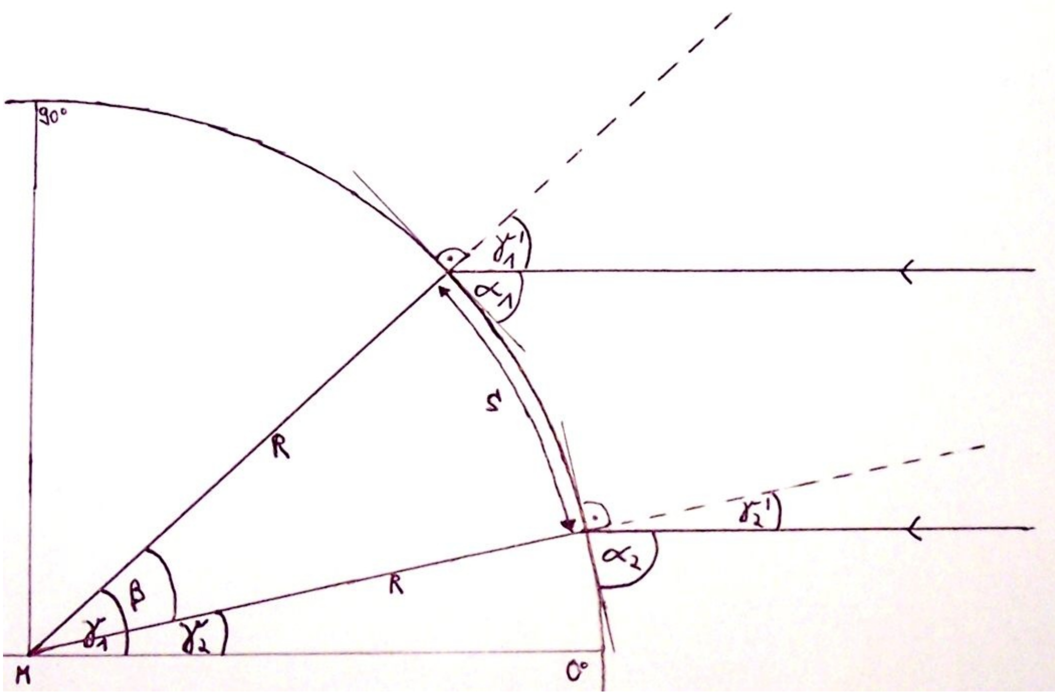


Abb. 2.1.1.3

Idee: Würden wir den eingezeichneten Winkel β (im Gradmaß) kennen, könnten wir zusammen mit dem Kreisbogen s den Radius R sofort bestimmen:

$$s = 2\pi \cdot R \cdot \frac{\beta}{360\,°}$$

Umstellen nach R ergibt:

$$\Rightarrow R = \frac{s \cdot 360\,°}{2\pi \cdot \beta} \qquad (1.1)$$

Da wir s kennen, brauchen wir also nur noch β zu berechnen:

Rechnung:

α_1, α_2 haben wir gemessen. Das sind jeweils die Winkel zwischen einfallendem Licht und der horizontalen Ebene, auf der der Schatten fällt. In der zweidimensionalen Ansicht der obigen Zeichnung ist die horizontale Ebene als Tangente an den Kreis dargestellt.

Kreistangenten schließen mit dem durch den Kontaktpunkt laufenden Radius einen rechten Winkel ein. Daher ist $\alpha_1+\gamma'_1=90°$ und $\alpha_2+\gamma'_2=90°$ und nach Umstellung:

$$\gamma'_1=90°-\alpha_1\,,\quad \gamma'_2=90°-\alpha_2$$

γ_1, γ'_1 und γ_2, γ'_2 sind jeweils Stufenwinkel und daher gleich groß. Also ist

$$\gamma_1=\gamma'_1=90°-\alpha_1\,,\quad \gamma_2=\gamma'_2=90°-\alpha_2$$

Der Winkel β ist die Differenz aus γ_1 und γ_2:

$$\beta=\gamma_1-\gamma_2=(90°-\alpha_1)-(90°-\alpha_2)=\alpha_2-\alpha_1 \qquad (1.2)$$

Einsetzen von (1.2) in (1.1) ergibt schließlich:

$$R=\frac{s\cdot 360°}{2\pi\cdot\beta}=\frac{s\cdot 360°}{2\pi\cdot(\alpha_2-\alpha_1)}$$

Beispiel

Im Rahmen der Astronomie-AG wurden folgende Werte gemessen:
$\alpha_1 = 42{,}1°$ $\alpha_2 = 45{,}7°$ $s = 440\ \text{km}$

$$\Rightarrow R\approx\frac{440\,km\cdot 360°}{2\cdot 3{,}14\cdot(45{,}7°-42{,}1°)}\approx 7006\,km$$

Literaturwert: R = 6370 km

2.1.2 Voraussetzende Bemerkungen

Bevor wir weitere Größen unseres Sonnensystems bestimmen, müssen wir uns noch etwas bewusst machen, das ich an dem folgenden Beispiel einführen möchte:

Im folgendem Bild sind zwei Sterne eingezeichnet. Diese Sterne werden von einem Beobachter von der Erde aus beobachtet. Eingezeichnet sind außerdem Pfeile, die die Beobachtungsrichtung darstellen.

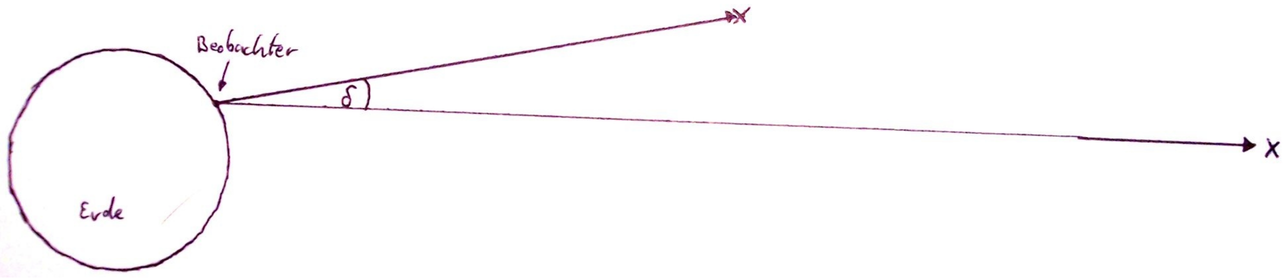


Abb. 2.1.2.1

Da wir keine Sinnesorgane besitzen, die große Distanzen abschätzen können, können wir ausschließlich den Winkel δ zwischen beiden Objekten messen - nicht jedoch die Entfernung der Objekte. Beispiel können wir daher nicht den Abstand zwischen dem einen und den anderen Stern messen.
Den Winkel δ, den wir messen können, nennt man **Winkelabstand**. Dieser sagt überhaupt nichts über den tatsächlichen Abstand zweier Objekte aus.

Allgemein gilt:
*Am Nachthimmel können nur zwei Dinge direkt gemessen werden: **Winkelabstände** und **die zeitliche Änderung von Winkelabständen** (bzw. die Zeit).*
Zur Ermittlung von Größen im Sonnensystem (und auch im Universum allgemein) haben wir also ausschließlich diese beiden Zugänge.

Bemerkung: Die Position (Rektaszension, Deklination) eines Sterns ist auch nur der Winkelabstand relativ zu einem genormten Bezugspunkt.

Wie misst man Winkelabstände?
Historisch durch den sogenannten Sextanten, heute in der Regel digital mit Hilfe von Computern.

Wie kann man ohne großen Aufwandt Winkelabstände messen?
Durch die folgende Konstruktion:
Man nehme einen Stab der Länge L und ein (durchsichtiges) Lineal. Das Lineal befestigt man senkrecht zu dem Stab auf dessen eines Ende (Abb. 2.1.2.2).

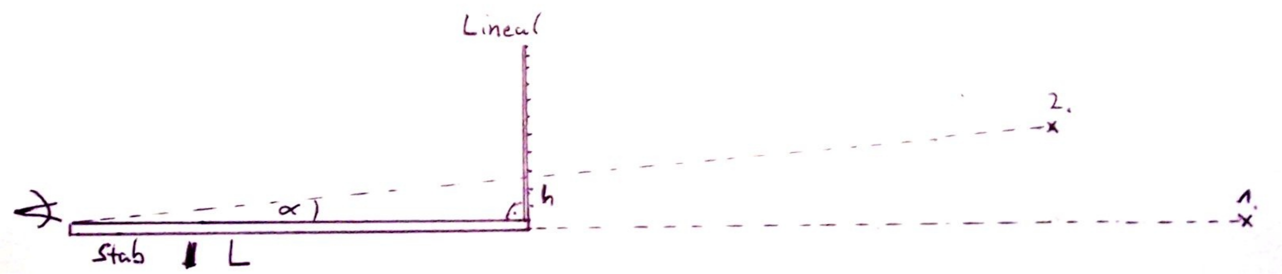


Abb. 2.1.2.2

Nun misst man den Winkel wie folgt: Von dem Ende aus, an dem das Lineal nicht befestigt ist, schaut man entlang des Stabes und richtet ihn auf das erste Objekt. Während der Stab auf das erste Objekt zeigt, ließt man auf der Skala des Lineals den Wert h ab, in dessen Richtung sich das zweite Objekt befindet. Der Winkel α ergibt sich aus der Definition des Tangens:

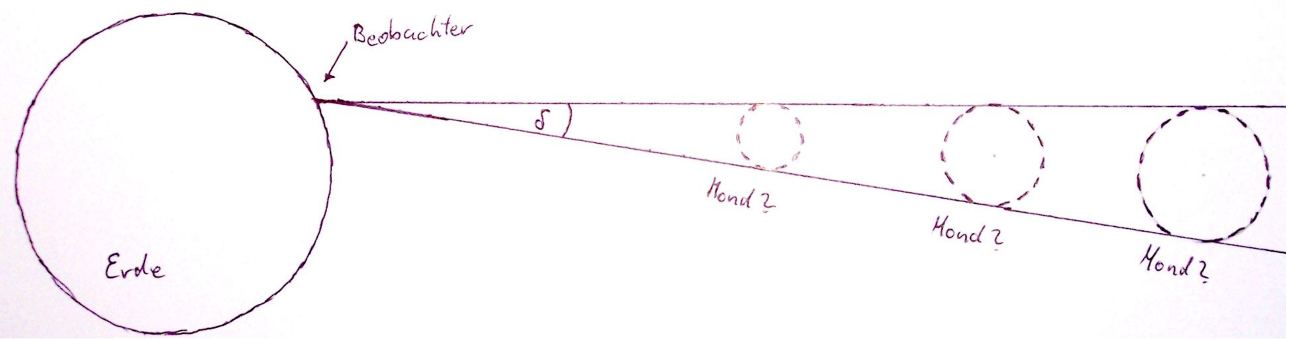
$$\tan(\alpha) = \frac{h}{L} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{h}{L}\right)$$

Wobei arctan die Umkehrfunktion von der Tangensfunktion ist und h und L in der selben Einheit (z.B. Zentimeter) gemessen werden müssen.

2.1.3 Bestimmung der Mondentfernung

Nach der Methode des vorherigen Abschnittes lässt sich der Winkeldurchmesser δ des Mondes messen: Dies ist der Winkelabstand von z.B. dem unteren Rand des Mondes zum oberen Rand.

Durch diese Messung wissen wir jedoch noch nichts über den Mondabstand zur Erde:



In obiger Abbildung sind drei mögliche Mondpositionen- und größen eingezeichnet, bei denen der Mond den Winkeldurchmesser δ hat.

Wie eben gesehen, können wir keine anderen Eigenschaften astronomischer Objekte außer die des Winkelabstandes messen. (Neben der Zeit)

Für die Bestimmung der Entfernung zum Mond müssen wir uns daher etwas einfallen lassen!

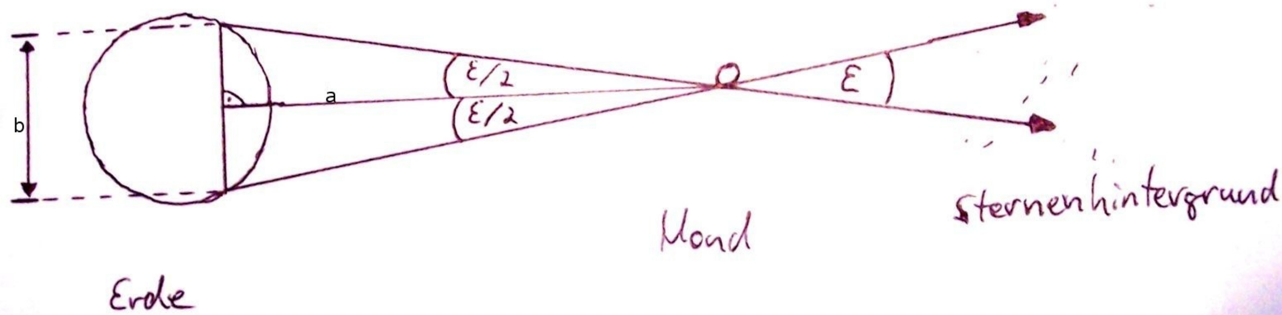
Bestimmung der Mondentfernung über die Parallaxen-Methode

An dieser Stelle kommt es mir nur auf ein grobes Verständnisses des Prinzipes der Parallaxen-Methode an. Allgemeiner wird die Methode in einem späteren Kapitel besprochen.

<u>Idee:</u> Zwei Beobachter an unterschiedlichen Orten auf der Erde schauen aus unterschiedlichen Richtungen auf den Mond. Weil sich aus unterschiedlichen Richtungen auf den Mond schauen, sieht der eine Beobachter den Mond vor einem leicht anderen Sternenhintergrund als der andere.

Diese Verschiebung kann man bestimmen, indem die beiden Beobachter den Winkelabstand des Mondes in der Richtung der Verschiebung zu einem Stern in der Nähe messen. Der eine Beobachter misst dabei einen größeren Winkelabstand als der andere - die Differenz dieses Winkelabstandes nennt man die **Parallaxe**.

In der folgenden Illustration ist die Parallaxe der Winkel ε; die Beobachter konzentrieren sich auf einen festgelegten Punkt auf dem Mond, hier der unterste Rand des Mondes:



Die Situation in der obigen Darstellung ist bewusst besonders einfach gewählt:
Der obere und untere Beobachter bilden zusammen mit dem Mond ein gleichschenkliges Dreieck. Eingezeichnet sind die Richtungen, mit denen die Beobachter auf die Unterseite des Mondes schauen sowie der direkte Abstand b der beiden Beobachter, der hier bekannt sein soll.

Die eingezeichnete Höhe a des Dreiecks entspricht näherungsweise dem Abstand Erde-Mond. Die Höhe halbiert das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit den eingezeichneten Winkeln. Mit Hilfe der Definition des Tangens lässt sich die Höhe und damit der Abstand Erde-Mond aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken heraus berechnen:

$$\frac{b/2}{a} = \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Umformungen:

$$b/2 = \tan(\varepsilon/2)\cdot a \Rightarrow \; a = \frac{b/2}{\tan(\varepsilon/2)} = \frac{b}{2\cdot\tan(\varepsilon/2)}$$

Dies ist der Abstand der Erde zum Mond. Mit der Parallaxen-Methode werden wir uns zu einem späteren Zeitpunkt nochmal auseinandersetzen.

Für die Entfernungsbestimmung über die Parallaxen-Methode benötigt man zwei Beobachter an weit entfernten Orten, sowie deren genaue Lage.

Die folgende Methode der Entfernungsbestimmung des Mondes ist wesentlich einfacher in der Durchführung.

Bestimmung der Mondentfernung über Mondfinsternisse

Diese Methode kann von jeden interessierten Leser selbst durchgeführt werden.

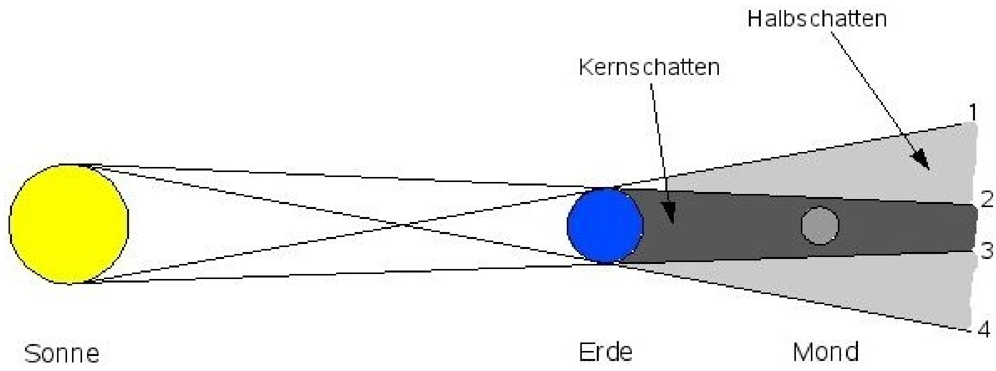


Abb. 2.1.3.1: Mond im Kernschatten.

Idee: Der Kernschatten der Erde spitzt sich mit zunehmendem Abstand zur Erde zu. Der Kernschatten wird sozusagen enger, sein Radius mit dem Abstand zur Erde kleiner. Aus der Beobachtung einer Mondfinsternis können wir durch den auf den Mond abgebildeten Kernschattenradius den Abstand des Mondes "rückrechnen".

Für uns von Interesse ist der Eintritt oder der Austritt des Mondes in bzw. aus dem Kernschatten. Wie in Abb. 2.1.3.1 schon erkennbar, läuft der Kernschatten zu einem Punkt zusammen.
Zur Verdeutlichung dieses Umstandes die folgende Zeichnung:

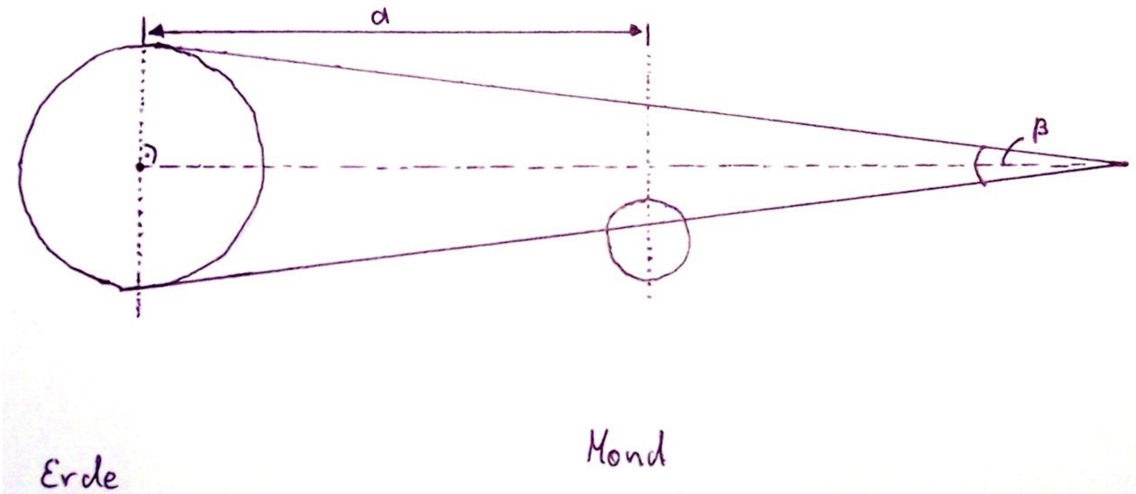


Abb. 2.1.3.2: Eintritt des Mondes in den Kernschatten.

Im Dreidimensionalen hat der Kernschatten die Form eines Kegels. Dargestellt in den obigen (und allen weiteren) Abbildungen ist der zweidimensionale Schnitt durch Erde und Kegel. Diese zweidimensionale Darstellung ermöglicht die Anwendung bekannter Sätze aus der Mathematik.
Der Schatten der Erde läuft im Winkel β zusammen. a ist der Abstand Erde-Mond, den wir bestimmen wollen.

Gemessen werden die folgenden Werte:

1. Winkelradius α des Erdschattens auf dem Mond

2. Winkel β des Erdschattenkegels

Außerdem sind bekannt:

a) Der Erdradius aus 2.1.1
b) Der Winkeldurchmesser δ des Mondes aus 2.1.3 mit den Methoden aus 2.1.2; Der Winkelradius ε des Mondes ist der halbe Winkeldurchmesser: ε = δ/2

zu 1.: Messung des Winkelradius' α des Erdschattens auf dem Mond

Die am wenigsten aufwendige Methode ist die Zeichnerische: Man fertigt eine Zeichnung der Mondfinsternis an. Man zeichnet mit Hilfe eines Zirkels einen Kreis. Anschließend versucht man, möglichst genau, den während der Finsternis sichtbaren Erdschatten auf dem Mond in die Zeichnung zu übertragen. Die Grenzen des Kernschattens liegen am Rande der dunkelsten Bereiche während der Finsternis.

Wir wissen: Die Erde wirft einen runden Schatten. Deshalb versuchen wir als nächsten Schritt, mit dem Zirkel einen Kreis derart auf die Zeichnung zu platzieren, dass der eingezeichnete Erdschatten auf dem Kreisbogen liegt.

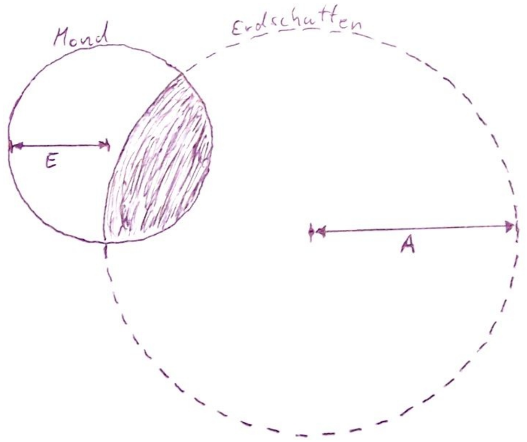


Abb. 2.1.3.3: Abschätzung des Winkeldurchmessers des Erdschattens

Abb. 2.1.3.3 zeigt eine solche Zeichnung als Beispiel. E ist der Radius des gezeichneten Mondes (z.B. in Zentimentern). E entspricht in der Zeichnung den am Himmel sichtbaren Winkelradius ε.

Auch A lässt sich aus der Zeichnung messen. Dies ist der Radius des gezeichneten Kernschattens der Erde in Mondabstand. A in der Zeichnung entspricht dem von der Erde aus gesehenen Winkelradius der Erde α. Das Verhältnis A/E aus der Zeichnung ist also gleich dem Verhältnis α/ε der Winkelradien am Himmel. Daraus folgt:

$$\frac{A}{E} = \frac{\alpha}{\varepsilon}$$, womit sich für α ergibt:

$$\alpha = \frac{A}{E} \cdot \varepsilon$$

ε ist dabei der Winkelradius des Mondes - also der halbe Winkeldurchmesser (Kenntnis b)).

<u>Hinweis:</u> Mit digitalen Photos statt Zeichnungen und anschließender digitalen Bearbeitung lässt sich die Genauigkeit der Messung von α erheblich erhöhen.

zu 2.: Messung des Winkels β des Erdschattenkegels
Bevor wir den Winkel β messen, müssen wir uns im Klaren sein, wie dieser zustande kommt. Dazu habe ich folgende Illustration gezeichnet:

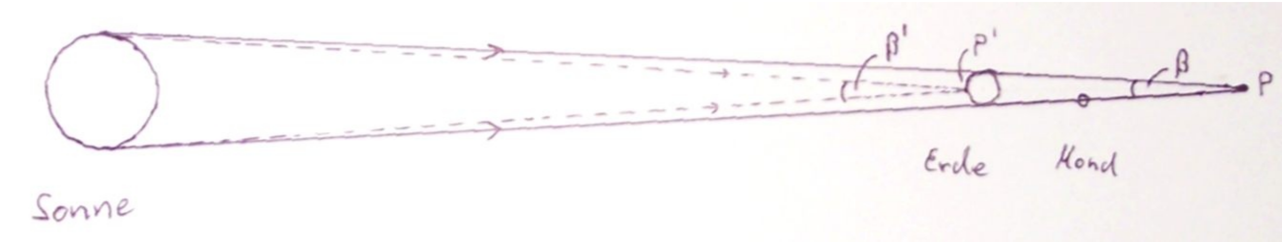


Abb. 2.1.3.4

Entsprechend der Abbildung wird der Kernschatten der Erde durch Strahlen begrenzt, die vom Rand der Sonne ausgehen. Diese Strahlen laufen im Punkt P zusammen und bilden dort den Winkel β. In der Illustration sind die beiden Strahlen vom oberen und unteren Rand der Sonne eingezeichnet: Der Winkel β ist also nichts anderes, als der Winkeldurchmesser der Sonne vom Punkt P aus gesehen.
Wir befinden uns auf der Erdoberfläche. Das heißt, wir können nicht ohne größeren Aufwandt zum Punkt P fliegen und den Winkel β ausmessen. Wir können jedoch eine gute Näherung dieses Winkels von der Erdoberfläche aus machen:
Wenn wir von der Erdoberfläche aus (dem Punkt P') den Winkel β' zwischen den z.B. oberen und unteren Rand der Sonne messen, so erhalten wir den Winkeldurchmesser der Sonne von der Erde aus.
Genauere Rechnungen zeigen, dass diese Näherung sogar so gut ist, dass man β und β' als gleich groß ansehen kann.

Daher messen wir nun den Winkel β von der Erdoberfläche aus, indem wir den Winkeldurchmesser der Sonne bestimmen.

Hinweis: Der Winkeldurchmesser wird nicht mit der Apparatur aus 2.1.2 gemessen! Erblindungsgefahr!

Wir messen den Winkel β mit Hilfe einer selbstgebauten Lochkamera:
In ein möglichst großes Stück Pappe (mindestens 1 m^2, besser mehr) wird zentral ein möglichst kleines Loch geschnitten. Diese Pappe sollte mindestens 1,5 Meter über einer weißen Fläche montiert sein. Pappe und Fläche sind genau dann richtig zur Sonne hin ausgerichtet, wenn auf der Fläche ein kreisrunder Lichtfleck erscheint, der von dem Loch herrührt.
Das Loch sollte, wie gesagt, möglichst klein sein. Es sollte aber dennoch die Größe haben, dass man an dem Lichtfleck Messungen anstellen kann. Hier eine Skizze:

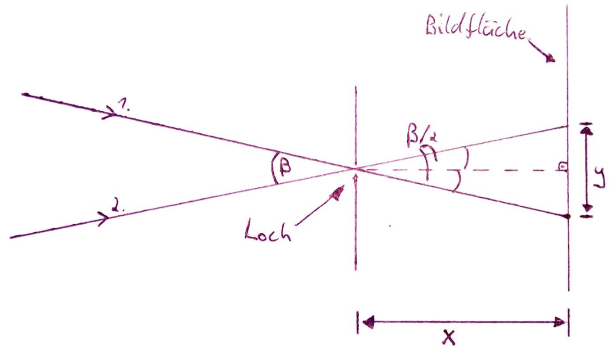


Abb. 2.1.3.5: Ermittlung des Winkelradius' der Sonne über Lochkamera

Strahl 1 soll hier von dem oberen Rand der Sonne ausgehen, Strahl 2 von dem unteren. Die beiden Strahlen laufen am Loch zusammen (das ist unser Punkt P'!). Sie bilden dort den Winkel β.
Für den kreisrunden Fleck auf der Bildfläche wird der Durchmesser y gemessen. Der Abstand zwischen Lochpappe und Bildfläche ist x.
In der Illustration habe ich das in der Zeichnung entstehende Dreieck durch die gestrichelte Linie halbiert. Es entstehen so zwei rechtwinklige Dreiecke. Über die Definition des Tangens lässt sich β nun berechnen:

$$\frac{y/2}{x} = \tan(\beta/2)$$, nach β aufgelöst:

$$\beta = 2 \cdot \arctan\left(\frac{y/2}{x}\right)$$

Der Literaturwert beträgt: 0,54°.

Rechnung:
Nachdem wir die entsprechenden Größen gemessen haben, können wir mit der Berechnung der Mondentfernung beginnen.

In der folgenden Zeichnung sind alle für die Rechnung benötigten Zusammenhänge dargestellt:

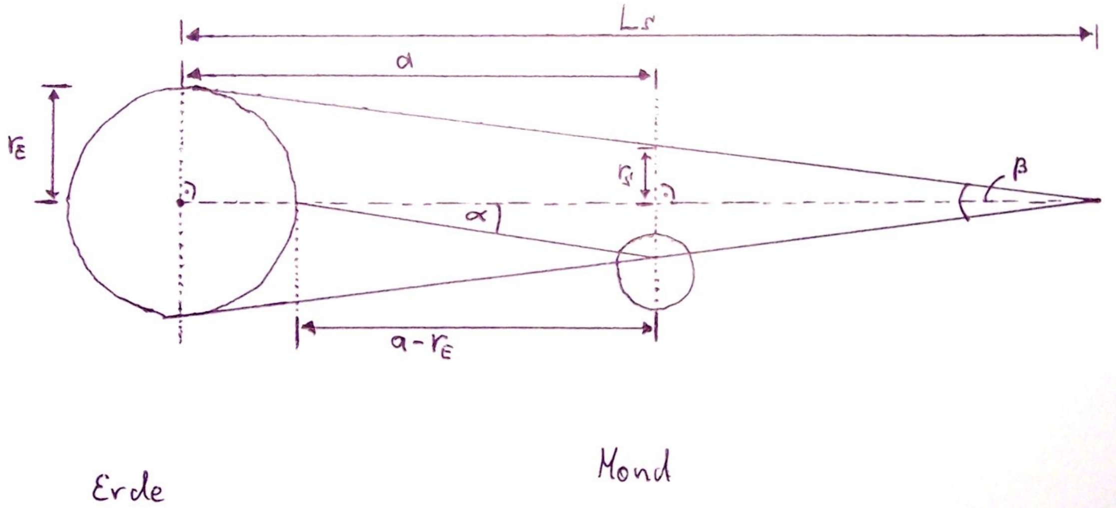


Abb. 2.1.3.6: Zur Berechnung des Mondabstandes

L_S: Die Länge des Kernschattens der Erde

a: Der Abstand von der Erde zum Mond
r_E: Der Erdradius
r_S: Der Radius des Kernschattens im Abstand des Mondes
α: Winkelradius des Erdschattens auf dem Mond (von der Erdoberfläche aus gesehen).
Unter 1. berechnet.
β: Winkel der Kegelspitze des Kernschattens der Erde.

Wichtig sind die folgenden drei Zusammenhänge [A], [B] und [C], die direkt aus der Zeichnung folgen:

[A] $$\frac{r_E}{L_S} = \tan(\beta/2)$$

Nach L_S umgeformt:

$$L_S = \frac{r_E}{\tan(\beta/2)} \quad \text{[A.1]}$$

[B] $$\frac{r_S}{L_S - a} = \tan(\beta/2)$$

Nach r_S aufgelöst:

$$r_S = (L_S - a) \cdot \tan(\beta/2)$$

L_S aus [A.1] eingesetzt liefert mit anschließendem Ausmultiplizieren:

$$r_S = \left(\frac{r_E}{\tan(\beta/2)} - a\right) \cdot \tan(\beta/2) = r_E - a \cdot \tan(\beta/2) \quad \text{[B.1]}$$

[C] $$\frac{r_S}{a - r_E} = \tan(\alpha)$$

Diese Gleichung folgt, wie gesagt, aus der Zeichnung. Wir vermuten jedoch, dass der Mondabstand a sehr groß gegen den Erddurchmesser r_E ist. Und zwar so groß, dass r_E hier keine Rolle mehr spielt. Also setzen wir näherungsweise $a \approx a - r_E$:

$$\frac{r_S}{a} = \tan(\alpha)$$

Nun setzen wir r_S aus Gleichung [B.1] ein:

$$\frac{r_E - a \cdot \tan(\beta/2)}{a} = \tan(\alpha)$$

Wir formen jetzt in mehreren Schritten nach a um. Zunächst multiplizieren wir mit a, und addieren anschließend $a \cdot \tan(\beta/2)$:

$$r_E = a \cdot \tan(\alpha) + a \cdot \tan(\beta/2) = a \cdot (\tan(\alpha) + \tan(\beta/2))$$

Division durch die rechte Klammer ergibt für a nun die gewünschte Gleichung:

$$a = \frac{r_E}{\tan(\alpha) + \tan(\beta/2)}$$

Dies ist der Abstand Erde-Mond. α und β haben wir in diesem Abschnitt gemessen. r_E wurde im Abschnitt 2.1.1 bestimmt.

Bestimmung der Mondentfernung durch Laufzeitmessung

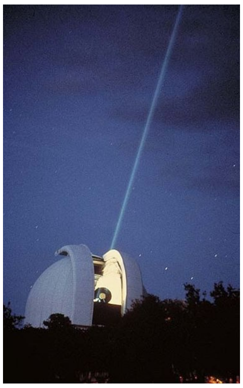
Im Rahmen der ersten Mondlandung 1969 stellte die NASA speziell entwickelte Laser-Reflektoren (Photo links) auf dem Mond auf. Diese Reflektoren spiegeln einfallendes Licht in genau die Richtung zurück, aus der es kommt.
Seit dem kann mit großer Apparatur die Entfernung zum Mond durch die Laufzeit des Lichtes auf 2 cm genau bestimmt werden: Dabei wird mit einem LASER ein Reflektor auf dem Mond anvisiert. Das Licht wird auf die Erde zurückgespiegelt. Über die Lichtlaufzeit wird die Mondentfernung berechnet.

Licht legt in einer Sekunde genau 299792,458 Kilometer zurück. Mißt man die Zeit t zwischen dem Aussenden des Lichtes in Richtung Mond und dem Empfang, kann man die Strecke s berechnen, die das Licht in dieser Zeit zurückgelegt hat:

$$s = c \cdot t \quad ,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist: c = 299792,458 km/s. Die Strecke s ist nun die Strecke zum Mond - und wieder zurück. Um die Mondentfernung a_M zu erhalten, müssen wir s also noch durch 2 teilen.

$$a_M = \frac{s}{2} = \frac{c \cdot t}{2}$$



Das rechte Photo zeigt das McDonald-Observatorium während einer Entfernungsbestimmung zum Mond. Deutlich zu sehen ist das vom Laser ausgesandte Lichtbündel.

2.1.4 Errechnung des Monddurchmessers

Aus 2.1.3 kennen wir den Winkeldurchmesser δ des Mondes sowie dessen

Abstand zur Erde a. Damit haben wir bereits alle zur Berechnung des Monddurchmessers benötigten Messdaten.

Der Abstand Beobachter-Mond entspricht in guter Näherung dem Abstand Erde-Mond a:

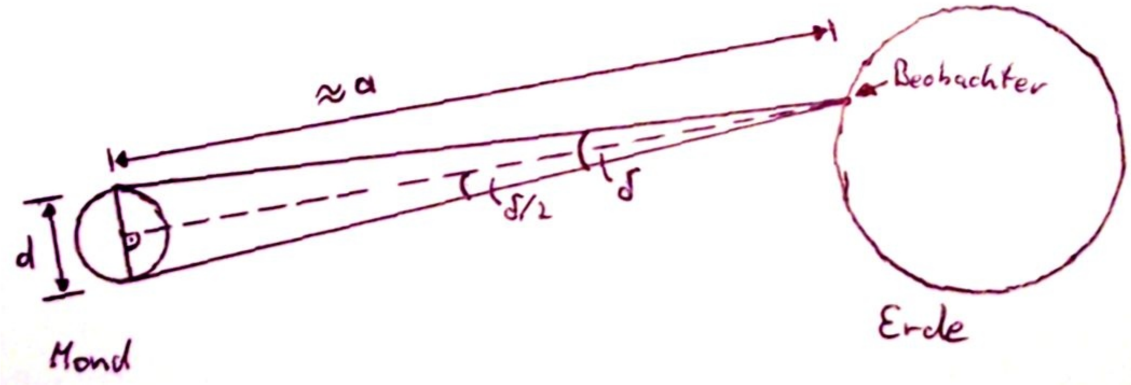


Abb. 2.1.4.1 Berechnung des Monddurchmessers

Die Verbindungslinien Beobachter - oberes "Mondende" und Beobachter-unteres "Mondende" entsprechen den jeweiligen Blickrichtungen. Der Winkel zwischen den Verbindungslinien entspricht dem Winkeldurchmesser des Mondes δ. Die Verbindungslinie oberes Mondende - unteres Mondende entspricht dem Monddurchmesser d.
Das durch diese Linien entstandene Dreieck teilen wir durch die Verbindungslinie Mondmitte - Beobachter in zwei rechtwinklige Dreiecke auf. Offenbar wird der Winkel beim Beobachter halbiert, und wir können wieder die Definition des Tangens anwenden:

Aus der Zeichnung erkennt man den Zusammenhang

$$\frac{d/2}{a} = \tan(\delta/2)$$

Wir lösen die Gleichung nach den Monddurchmesser d auf und erhalten für diesen:

$$d = 2a \cdot \tan(\delta/2)$$

2.1.5 Abstand zu den nächsten Sternen: Jährliche Parallaxe

Machen wir ein Experiment: Wenn man den Arm ausstreckt und abwechselnd mit dem linken und mit dem rechten Auge auf den Zeigefinger schaut, stellt man fest, dass er sich - je nach Auge - vor einem jeweils anderen, verschobenen Hintergrund befindet. Je näher der Zeigefinger an das Gesicht herangeführt wird, desto stärker scheint der Zeigefinger vor dem Hintergrund verschoben.
Das liegt daran, dass das linkes Auge den Zeigefinger von einer anderen Richtung aus betrachtet, als das rechtes Auge. Da man mit beiden Augen abwechselnd auf den Zeigefinger schauen, laufen hier die Blickrichtungen zusammen. Der Winkel, unter dem die Blickrichtungen beim Zeigefinger

zusammenlaufen, wird um so größer, je näher der Zeigefinger an das Gesicht geführt wird – dementsprechend stärker scheint der Finger vor dem Hintergrund verschoben, wenn man abwechselnd mit Links und mit Rechts auf den Finger schaut. Wenn man den Finger nun sehr nahe an das Gesicht heranführen, wird das Zusammenlaufen der Blickrichtungen direkt am „schielen" der Augen sichtbar.
Wenn man mit beiden Augen schaut, werden die Bilder des linken und rechten Auges vom Gehirn kombiniert und so ein Tiefeneindruck erzeugt: Das Gehirn errechnet aus den Winkeln, mit denen die Augäpfel ausgelenkt sind, automatisch den Abstand zum Gegenstand – bis zu einer Entfernung von 20 Metern. Darüber hinaus wird der Winkel, unter dem die Blickrichtungen zusammenlaufen zu klein, um wahrgenommen werden zu können.

Die Natur hat hier also eine Methode der Entfernungsbestimmung entwickelt. Diese Methode beruht auf der Beobachtung eines Objektes (Zeigefinger) von zwei verschiedenen Richtungen aus (linkes, rechtes Auge).
In der Astronomie wird die gleiche Methode zur Bestimmung von astronomischen Entfernungen verwendet:

Innerhalb eines Jahres dreht sich die Erde um die Sonne. Die Erde wechselt also periodisch ihre Position! Das heißt: Wenn man von der Erde aus zu verschiedenen Jahreszeiten einen Stern beobachtet, so beobachtet man ihn von unterschiedlichen Richtungen aus – und hier passiert ein ähnlicher Effekt, wie der mit dem Zeigefinger: Dadurch, dass man von unterschiedlichen Richtungen aus beobachtet, erscheint der beobachtete Stern vor dem Hintergrund verschoben. Die mit dem *jährlichen* Umlauf der Erde um die Sonne verbundene Verschiebung nennt man **jährliche Parallaxe**.
Je stärker der Stern vor dem Hintergrund verschoben erscheint, desto näher befindet sich der Stern offenbar an uns, je weniger er vor dem Hintergrund verschoben erscheint, desto weiter ist er weg. Diesen Zusammenhang wollen wir nun in Formeln fassen, um tatsächlich einen Wert berechnen zu können.

Zum Verständnis folgende Zeichnung dienen:

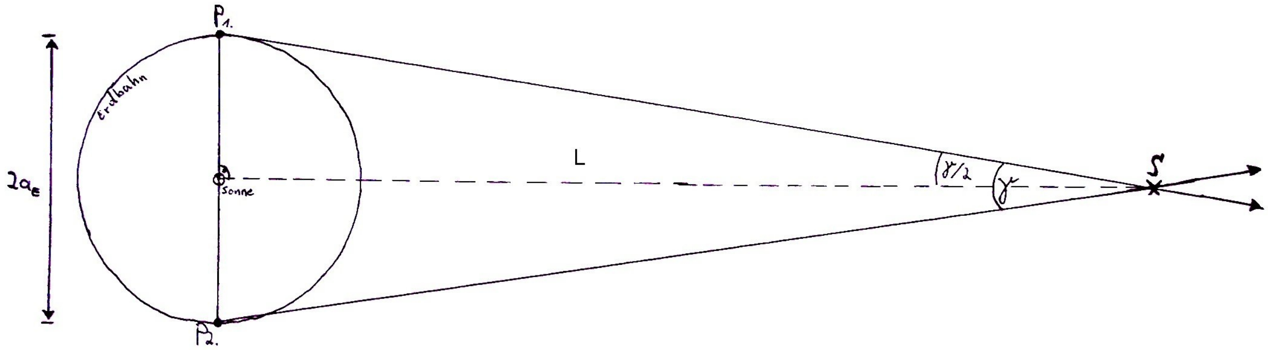


Abb. 2.1.5.1

Links dargestellt ist die näherungsweise kreisförmige Bahn der Erde um die Sonne. Der Mittelpunkt des Kreises stellt also die Sonne dar. Innerhalb eines <u>ganzen</u> Jahres kreist die Erde entgegen dem Uhrzeigersinn zum Beispiel von Position P_1 nach Position P_1 – sie vollführt also eine 360°-Drehung um die Sonne. Innerhalb eines <u>halben</u> Jahres dreht sich die Erde nur um 180°: Nämlich von Position P_1 nach Position P_2. Der Abstand von P_1 zur Sonne ist offenbar der

Abstand Erde-Sonne, den wir mit a_E bezeichnen. Wir nehmen hier an, dieser Abstand sei bekannt – wie man ihn misst, zeigen wir erst in Kapitel 2.2, denn noch fehlen uns dazu ein paar Kenntnisse.
Von den Positionen P_1 und P_2 aus wird nun der Stern S beobachtet. Eingezeichnet sind die Beobachtungsrichtungen von P_1 und P_2 zum Stern: Das sind die Pfeile, welche sich beim Stern treffen.
Die beiden Pfeile schließen beim Stern S den Winkel γ ein. Dieser Winkel wird Parallaxenwinkel oder einfach auch nur **Parallaxe** genannt. Das ist der Winkel zwischen den Beobachtungsrichtungen.
Bevor wir darauf eingehen, wie man die Parallaxe (also den Winkel γ)messen kann, folgende Idee:

Angenommen, wir kennen γ . Dann lässt sich der Abstand L des Sterns sehr leicht durch die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks P_1-Stern-Sonne berechnen. Denn nach der Definition des Tangens gilt:

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{a_E}{L}$$

Hier ist a_E der Abstand Erde-Sonne. Die Gleichung lässt sich nach L auflösen:

$$L=\frac{a_e}{\tan(\gamma/2)} \qquad (2.1.5.1)$$

Doch wie bestimmt man den Winkel γ ?

Dazu erinnern wir uns zurück: γ ist der Winkel zwischen den beiden Beobachtungsrichtungen. Je weiter das Objekt aber entfernt ist, desto kleiner wird dieser Winkel, wie in der folgenden Abbildung nochmal illustriert wird:

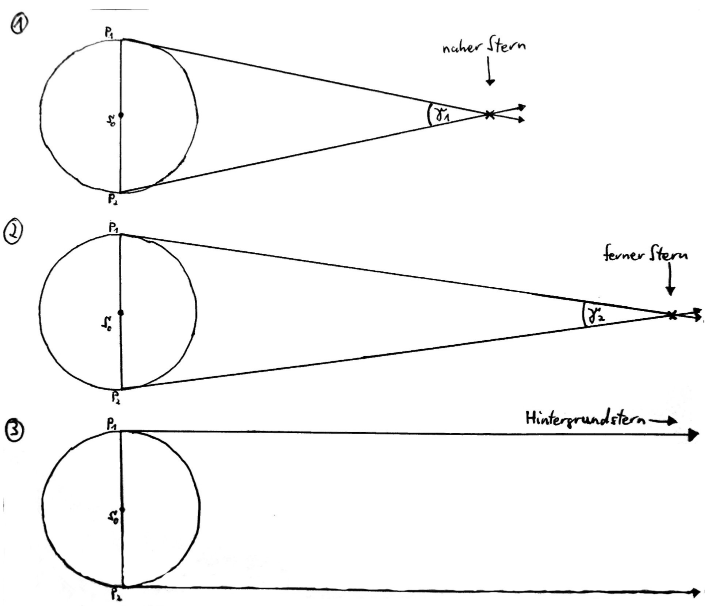


Abb. 2.1.5.2

Bei sehr, sehr weit entfernten Objekten (3) wird der Winkel derart klein, dass man ihn nicht mehr messen kann. Hier verlaufen die Blickrichtungen annähernd

parallel: Diese Objekte erscheinen also sowohl von Position P_1 als auch von Position P_2 aus gesehen vor dem gleichen Hintergrund. Sehr weit entfernte Objekte verschieben sich demnach nicht (bzw. nicht messbar) vor dem Hintergrund. Wir nennen solche Objekte deshalb Hintergrundobjekte (oder Hintergrundsterne).
Näher liegende Sterne verschieben sich vor dem Hintergrund – und damit im gleichen Maße vor den Hintergrundsternen.

Beobachtet man nun einen nahe liegenden Stern über ein ganzes Jahr hinweg, so beobachtet man ihn laufend aus anderen Richtungen, da sich die Erde ja um die Sonne dreht. Da sich die Erde auf einer Kreisbahn bewegt, erscheint die Verschiebung des Sterns vor dem Hintergrund ellipsenförmig. Wenn man die Position des Sterns im Laufe eines Jahres auf eine detailierte Sternkarte einträgt, ergibt sich dann ein Bild ähnlich der Illustration (Abb. 2.1.5.2).
Die schwächeren Punkte stellen die Hintergrundsterne dar. Die Punkte 1 und 2 sind so gewählt, dass sie den größten Abstand auf der Ellipse voneinander haben.

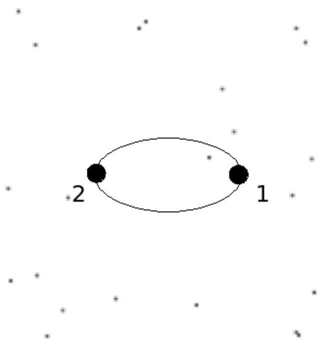


Abb. 2.1.5.3

Punkt 1 gibt die Position des Sterns wieder, wie er aus der Richtung von P_1 gesehen wird. Punkt 2 gibt die Position wieder, wie der Stern aus der Richtung von P_2 gesehen wird.
Eingangs (Abschnitt 2.1.2) hatten wir darüber gesprochen, dass man am Nachthimmel nur Winkel, jedoch keine Entfernungen messen kann.

Der Winkelabstand zwischen Punkt 1 und Punkt 2 in Abb. 2.1.5.2 entspricht nun dem Winkel γ aus Abb. 2.1.5.1. Der Winkelabstand jedoch lässt sich bei einer Sternkarte sehr leicht ablesen – vorausgesetzt, sie hat einen Maßstab, der angibt, welcher Winkelabstand einen Zentimeter auf der Karte entspricht. (Alternativ zu den Sternkarten können Computerprogramme genommen werden. Die meisten Computerprogramme haben eine Funktion zur Messung von Winkelabständen)

Ist γ über die geschilderte Methode bestimmt worden, lässt dich die Entfernung L zum Stern über die Formel (2.1.5.1) durch Einsetzen ausrechnen.

2.1.5 Abstand zum Mars über Parallaxen-Methode

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, wie man über die sogenannte jährliche Parallaxe den Abstand zu naheliegenden Sternen bestimmen kann. Sehr ähnlich wollen wir in diesem Abschnitt den Abstand zum Mars bestimmen. Auch hier geht es um die Beobachtung eines Objekts (des Mars) von zwei verschiedenen Richtungen aus.

Der Abstand Erde-Mars ist während einer Mars-Opposition am kleinsten, daher auch am leichtesten zu messen. Hier befinden sich im Idealfall Mars, Erde und Sonne auf einer Linie:

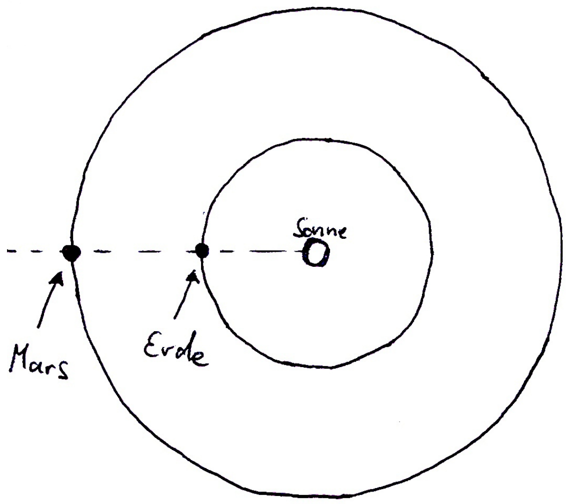


Abb. 1

Insbesondere befindet sich von der Erde aus gesehen der Mars auf der gegenüberliegenden Seite der Sonne - er ist also die ganze Nacht hindurch zu sehen!

Für die folgende Methode, den Abstand zum Mars zu bestimmen, benötigt man zwei Beobachter, die den Mars von möglichst unterschiedlichen Positionen auf der Erde aus beobachten.

Die beiden Beobachter B_1 und B_2 befinden sich also an unterschiedlichen Orten auf der Erde und beobachten gleichzeitig den Mars. Die Situation wird in der folgenden Zeichnung dargestellt. Um Zusammenhänge besser erkennen zu können, habe ich die Erde übertrieben groß gezeichnet:

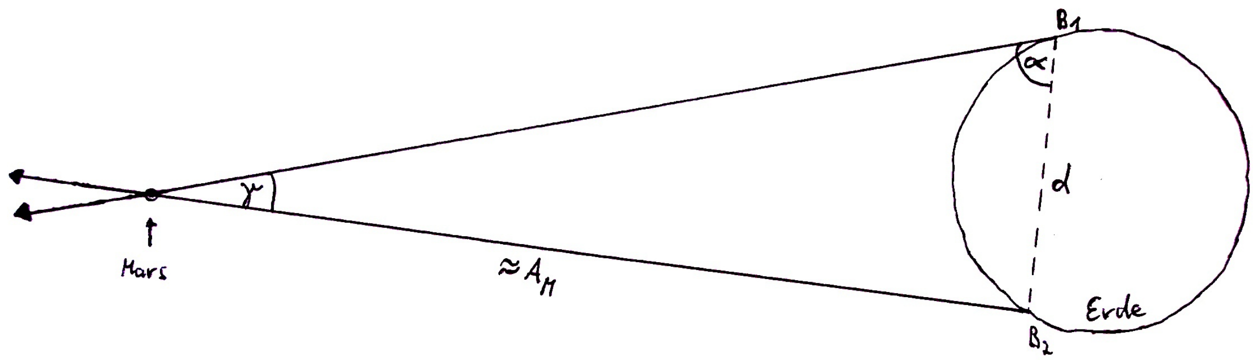


Abb. 2

Eingezeichnet ist der Mars (links) und die Erde (rechts) mit den beiden Beobachtern B_1 und B_2. Die Pfeile entsprechen den Blickrichtungen der jeweiligen Beobachter, wenn sie in Richtung Mars schauen. Offensichtlich sind die Blickrichtungen verschieden und laufen beim Mars unter dem Winkel γ zusammen.

Die gestrichelte Linie markiert den Abstand d zwischen den beiden Beobachtern. Zusammen mit den beiden Blickrichtungen ergibt sich ein Dreieck. Den Winkel bei B_1 brauchen wir für die spätere Berechnung und nennen ihn α .

Die Entfernung von Beobachter B_2 zum Mars (entlang der eingezeichneten

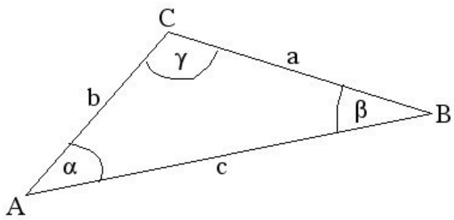
Blickrichtung) entspricht ungefähr der Entfernung der Erde zum Mars, da sich B_2 auf der Erde befindet. Wir nennen die Entfernung Erde-Mars A_M.

Angenommen, wir wüssten die Größen α, γ, und d . Dann können wir A_M über die obige Zeichnung mit Hilfe des Sinussatzes berechnen:

Erinnerung: Der Sinussatz

In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie der Sinus ihrer Gegenwinkel.

Bsp: Für das rechte Dreieck gilt:



$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad , \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \quad , \quad \frac{c}{a}=\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

Den Sinussatz auf das Dreieck B_1-B_2-Mars angewendet ergibt:

$$\frac{A_M}{d}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$$

Multiplikation mit d ergibt die Lösung:

$$A_M=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}\cdot d \qquad (1.5.1)$$

Diese Formel merken wir uns: Um die Entfernung zum Mars zu berechnen, muss man als nur die Winkel α und γ sowie die Strecke d bestimmen und diese Größen in die Formel (1.5.1) einsetzen.

Bestimmung von γ:

Wenn Beobachter B_1 und Beobachter B_2 auf den Mars schauen, so blicken sie in unterschiedliche Richtungen. Das heißt: Wenn B_1 auf den Mars blickt, so sieht er hinter dem Mars einen anderen Sternenhintergrund als B_2, denn die beiden Beobachter blicken von unterschiedlichen Richtungen aus auf den Planeten.

Angenommen, die Beobachter markieren jeweils die Position des Mars als dicken Punkt in einer detailierten Sternkarte, dann würde dies vielleicht so aussehen:

Das linke Bild zeigt die Sternkarte des Beobachters B_1, das rechte Bild die Sternkarte von Beobachter B_2:

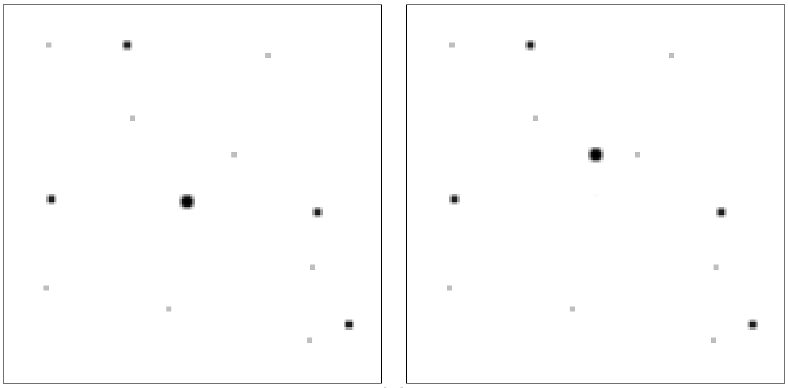


Abb. 3

Links: Aus der Sicht von B_1; Rechts: Aus der Sicht von B_2

Der Mars ist hier der dicke Punkt, etwa in Bildmitte. Wenn nun beide Beobachter ihre Beobachtung in eine dritte Sternkarte übertragen, ergibt sich folgendes Bild:

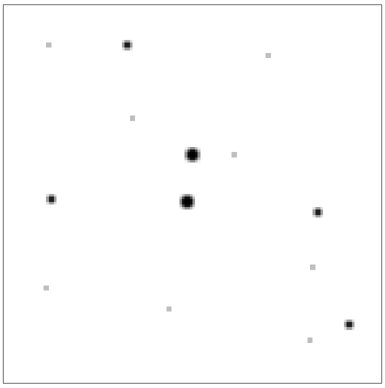


Abb. 4

Im obigen Bild entspricht der untere dicke Punkt der Position des Mars aus der Sicht von Beobachter B_1. Der obere dicke Punkt entspricht der Position des Mars von B_2 aus gesehen.

Auf einer Sternkarte gibt es - ähnlich wie auf einer Landkarte - einen Maßstab, die angibt, wie groß der Winkel zwischen zwei astronomischen Objekten ist, wenn sie auf der Sternkarte einen Zentimeter Abstand haben.
Beispiel: Angenommen, ein Zentimenter auf der Landkarte entspricht einen Winkelabstand von 0,1° in Wirklichkeit. Wenn auf einer solchen Landkarte zwei Objekte z.B. 2 cm voneinander entfernt liegen, so beträgt der Winkelabstand in Wirklichkeit 0,2° - d.h., der Winkel zwischen der Blickrichtung zum einen und der Blickrichtung zum anderen Objekt beträgt 0,2°.

Nun sehen wir uns Abb. 4 nocheinmal an: Dies soll die Sternkarte darstellen, in der die Position des Mars sowohl aus der Sicht von B_1 als auch aus der Sicht von B_2 eingezeichnet wurde. Wenn wir nun - durch Messen des Abstandes auf der Sternkarte - den Winkelabstand zwischen den beiden Positionen bestimmen, entspricht dieser Winkelabstand dem gesuchten Winkel γ .

Bestimmung des Abstandes d:

Hierfür schauen wir uns die in Abb. 2 dargestellte Situation genauer an:

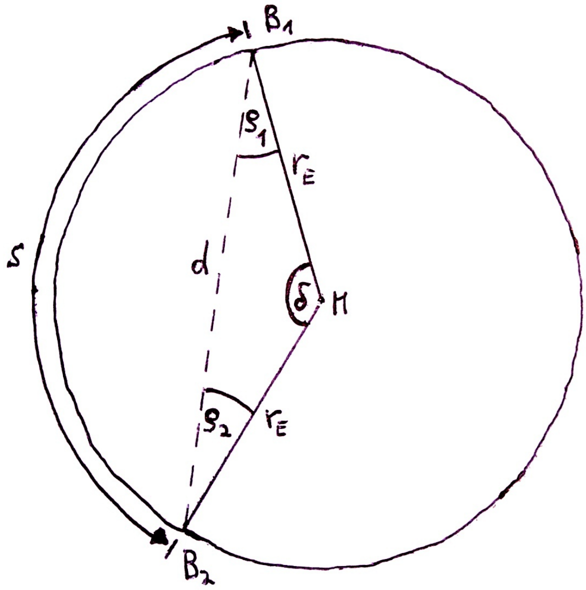


Abb. 5

In der Darstellung ist die Erde mit den beiden Beobachtern vergrößert gezeichnet. Neben dem Abstand d zwischen den Beobachtern sind weitere Hilfsgrößen eingezeichnet.

Bekannte Größe:

r_E	Erdradius. Wie man ihn bestimmt wissen wir aus Abschnitt 2.1.1

Unbekannte Größen:

s	Die kürzeste Strecke zwischen den Beobachtern entland der Erdoberfläche.
δ	Der Winkel zwischen MB_1 und MB_2.
ϱ_1, ϱ_2	Die Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks MB_1B_2 . Aus der Mathematik wissen wir: Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß, d.h.: $\varrho_1 = \varrho_2$
d	Der Abstand zwischen den Beobachtern - Ziel folgender Überlegung.

Die Strecke s entlang der Erdoberfläche kann gemessen werden (z.B. über eine Landkarte). Bei s handelt es sich um einen Kreisbogenabschnitt. Wenn die Strecke s dann bekannt ist, kann der Winkel δ über die Kreisformel berechnet werden: (Winkel in Grad)

$$s = 2\pi \cdot r_E \cdot \frac{\delta}{360°}$$

Dies ist der Bruchteil $\frac{\delta}{360°}$ des Kreisumfangs $U = 2\pi \cdot r_E$.

Umstellen der Gleichung nach δ ergibt:

$$\delta = \frac{s \cdot 360°}{2 \cdot \pi \cdot r_E} = 180° \cdot \frac{s}{\pi r_E} \qquad (1.5.2)$$

Diese Formel merken wir uns. Über sie lässt sich δ durch Einsetzen der gemessenen Werte für s und r_E berechnen.

Kennen wir δ , lassen sich mit Abb. 5 sehr einfach ϱ_1 und ϱ_2 ausrechnen:
die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich groß. Das bedeutet:

$$\varrho_2 = \varrho_1$$

Außerdem ist die Winkelsumme eines Dreiecks immer 180°:

$$\delta + \varrho_1 + \varrho_2 = 180° \Rightarrow \delta + 2 \cdot \varrho_1 = 180°$$

Nach ϱ_1 umgestellt ergibt schließlich:

$$\varrho_1 = 90° - \frac{1}{2} \cdot \delta \qquad (1.5.3)$$

Wenn wir nun nocheinmal einen Blick auf Abb. 5 werfen, fällt auf, dass sich auf das eingezeichnete Dreieck der Sinussatz anwenden lässt:

$$\frac{d}{r_E} = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\varrho_1)}$$

Multiplikation mit r_E liefert schließlich den Abstand d zwischen B_1 und B_2:

$$d = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\varrho_1)} \cdot r_E \qquad (1.5.4)$$

Bestimmung des Winkels α:

Die folgende Abb. 6 zeigt die selbe Situation wie die obige Abb. 2, nur dass hier mehr Details eingezeichnet sind:

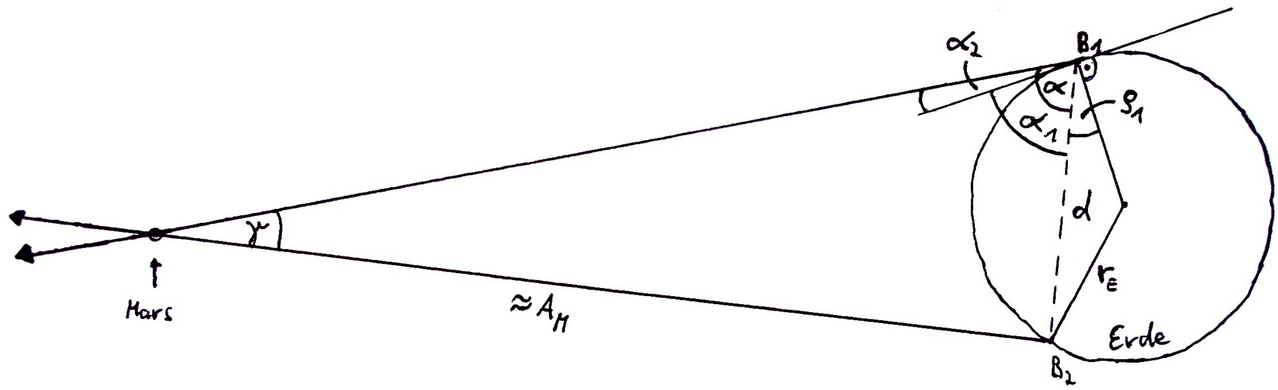


Abb. 6

Die Tangente, die am Kreis im Punkt B_1 eingezeichnet ist, markiert die sogenannte Horizontebene des Beobachter B_1: Der Beobachter kann nur Objekte oberhalb des Horizonts beobachten - ansonsten müsste er durch die Erde hindurch schauen können.
Die Tangente teilt den Winkel α in zwei Teile auf: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
α_2 lässt sich relativ einfach durch den Beobachter B_1 messen: Das ist der (kürzeste) Winkel zwischen Mars und Horizont. Hierzu kann er z.B. das "Gerät"

aus 2.1.2 benutzen.

Da die Kreistangente im Punkt B_1 senkrecht auf dem Kreisradius MB_1 steht, gilt:

$$\alpha_1 + \varrho_1 = 90°$$

ϱ_1 können wir durch Gleichung (1.5.3) berechnen. Also folgt für α_1 :

$$\alpha_1 = 90° - \varrho_1$$

Damit können wir den Winkel $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ausrechnen:

$$\alpha = 90° - \varrho_1 + \alpha_2 \qquad (1.5.5)$$

Sind alle Größen α, γ, d bestimmt, folgt der Abstand zum Mars direkt durch Einsetzen dieser Größen in Formel (1.5.1).

Lizenzen und Bildquellen

Alexander Staidl
Amselweg 13
35764 Sinn

Email: a.staidl@freenet.de